**ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 6**

**Статистичне оцінювання параметрів розподілу**

**Теоретичні відомості**

Закони розподілу цілком характеризують випадкові величини з імовірнісної точки зору. Кожний з них визначається одним чи декількома параметрами. Знання цих параметрів дозволяє отримати математичний вираз для функції розподілу, тобто повністю описати цей закон. Маючи, однак, лише вибіркові дані, можна обчислити тільки оцінки параметрів. Якщо відомо закон розподілу, то зрозуміло, які саме параметри треба розраховувати. Оцінки бувають *точковими* та *інтервальними*.

***1. Точкові оцінки математичного сподівання та дисперсії***

Під точковими оцінками розуміють оцінки невідомих числових параметрів розподілу. Це числа, які отримують при підстановці вибіркових значень  у формули для шуканого параметру. Математичне сподівання та дисперсію оцінюють з допомогою співвідношень:



Ці оцінки є дійсними та незміщеними. Для вибірки із нормальної сукупності оцінка  є також ефективною, а оцінка  наближається до ефективної при , тобто вона **є асимптотично ефективною**.

Незміщеність оцінки  досягається використанням для її розрахунку величини  замість очевидного, на перший погляд, значення . Вище зазначалося, що величину  називають числом ступенів вільності, яка дорівнює різниці між числом експериментальних даних  та числом додаткових параметрів, які входять у формулу для розрахунку дисперсії: цим параметром є оцінка середнього .

***2. Інтервальні оцінки математичного сподівання та дисперсії***

Точкові оцінки параметрів не містять інформації про близькість оцінки параметра до його точного значення. Тому використовують більш інформативний спосіб оцінювання невідомих параметрів – *інтервальне оцінювання*. Його суть полягає у визначенні інтервалу, у який із заданою точністю потраплятиме оцінюваний параметр.

**Інтервальною оцінкою** параметра  називають інтервал, границі якого  є функціями вибіркових значень , у який із заданою ймовірністю *р* потрапляє оцінюваний параметр:

.

Інтервал () називають **довірчим**, а його межі – відповідно, нижньою та верхньою довірчими межами; величину  - рівнем значимості, який використовують при побудові довірчого інтервалу. З цього випливає, що довільна інтервальна оцінка характеризується двома числами: шириною довірчого інтервалу  та довірчою ймовірністю *р.*

Загальна процедура отримання інтервальної оцінки полягає у наступному:

1. Записують певне ймовірнісне твердження типу

, (1)

де  - функція густини ймовірності (зазвичай це функції нормованого гауссівського розподілу та розподілу Стьюдента) випадкової величини .

При цьому межі інтегрування визначають за допомогою додаткових умов:

. (2)

2. Аргумент функції вибирають так, щоб у кінцевому випадку оцінюваний параметр потрапляв у інтервал між величинами, які визначаються з вибірки, тобто у межі довірчого інтервалу ().

До прикладу, розглянемо побудову довірчого інтервалу для середнього значення , оцінка якого здійснюється на основі даних вибірки об’ємом *п* . У розглядуваному прикладі може бути два випадки: якщо об’єм вибірки є достатньо великим (*п >30),* то можна вважати, що вибіркова дисперсія, яка визначається за формулою

, рівна . У протилежному випадку цеп твердження не справджується.

У обох випадках оцінка середнього здійснюється на основі наведеного співвідношення.

Побудуємо довірчий інтервал на основі *t-*статистики Стьюдента для заданого рівня значимості . Спочатку за заданим значенням довірчої ймовірності  та числом ступенів вільності  на основі розподілу Стьюдента знаходимо симетричний відносно нуля відрізок , який задовольняє співвідношенню

.

Значення  знаходимо із таблиці розподілу Стьюдента.

З нерівності  та визначення статистики Стьюдента  знаходимо: , де  - оцінка середньоквадратичного відхилення дисперсії. Тоді з останньої нерівності та рівняння для довірчої ймовірності отримаємо:

.

Отже, оцінюваний параметр середнього значення попадає у інтервал  з довірчою ймовірністю . Довжина довірчого інтервалу дорівнює  і зростає з ростом довірчої ймовірності та зменшується при збільшенні числа вибірки *n*. З цього випливає, що для підвищення точності оцінювання необхідно збільшувати об’єм вибірки *n.*

Аналогічним чином можна побудувати довірчі інтервали для інших статистик.

**Порядок виконання роботи**

1. Згенерувати вибірки обсягом N=25; N=50; N=75; N=100; N=150 наступних типів:

- нормально розподілених випадкових величин з такими параметрами: m= Nвар, s=0,1Nвар (Nвар - порядковий номер студента у журналі);

- рівномірно розподілених випадкових величин з параметром з діапазону [0,b], b=Nвар ;

- випадкових величин, які підпорядковуються експоненціальному закону розподілу з параметром l=Nвар.

2. Для кожного N обчислити точкові оцінки параметрів згаданих вище законів розподілу.

3. Побудувати графіки, на яких зобразити дійсне значення параметру та залежність точкової оцінки від обсягу вибірки N.

4. Для п’яти вибірок нормально розподілених випадкових величин (див. п.1) розрахувати інтервальні оцінки математичного сподівання і дисперсії. Результати розрахунків занести у табл.

5. Побудувати графіки залежності довжини довірчих інтервалі а) від обсягу вибірки N при вибраній довірчій імовірності (Р=0,95); б) від довірчої імовірності Р при сталому обсязі вибірки (N=50).

*Таблиця.* Результати розрахунків числових характеристик

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Обсяг вибірки, N | Довірча імовірність,  Р | | | |
| 0,99 | 0,95 | 0,90 | 0,75 |
| 25 |  |  |  |  |
| 50 |  |  |  |  |
| 75 |  |  |  |  |
| 100 |  |  |  |  |
| 150 |  |  |  |  |